Problemas de flujo en redes: aplicación a redes de transporte urbano

Cristián E. Cortés
Universidad de Chile

V Escuela de Invierno, Luis A. Santaló
23-27 de Julio 2012

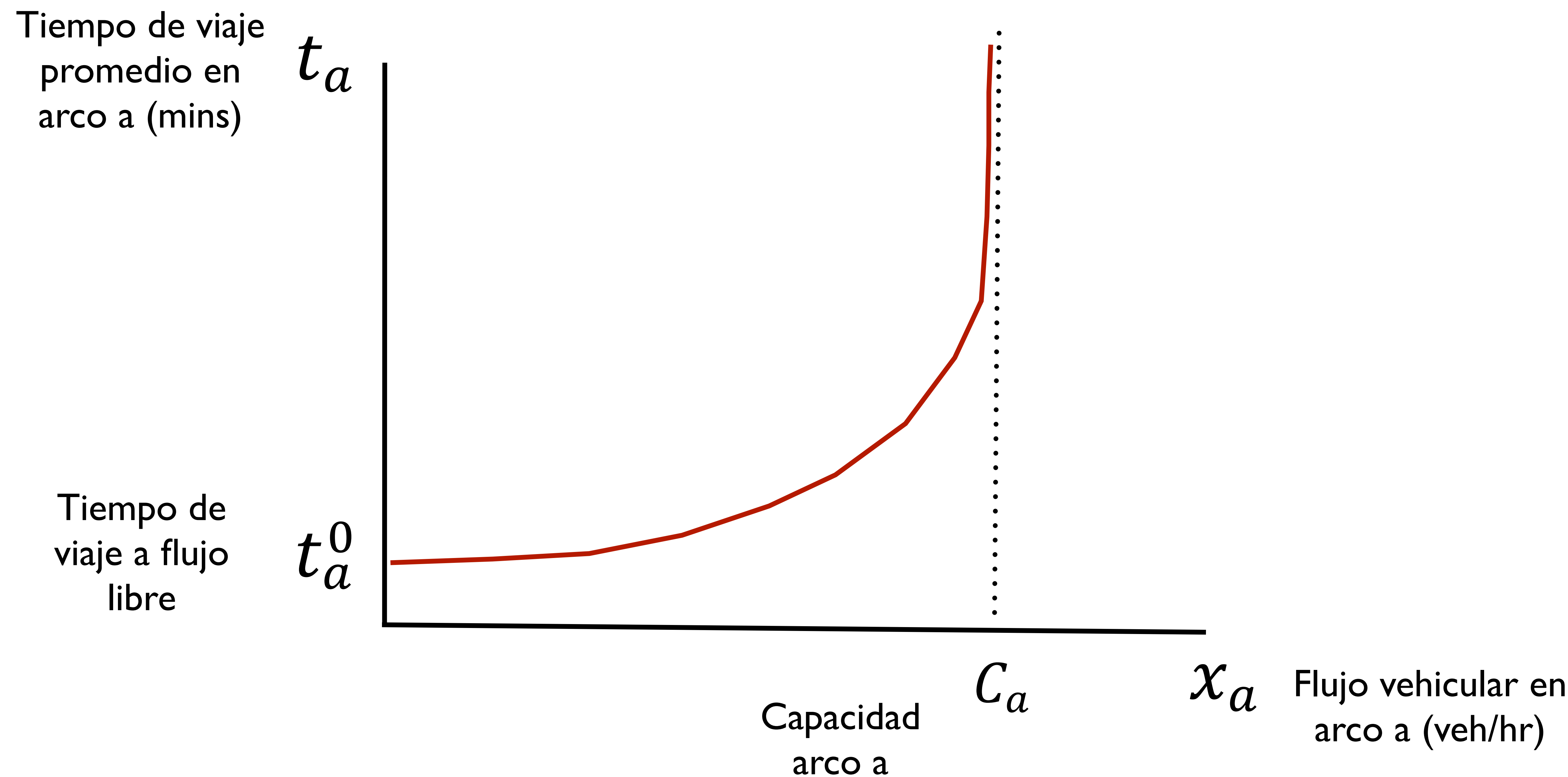
Outline

- Caracterización del equilibrio en redes de transporte privado (Wardrop)
- Funciones de rendimiento y descripción de redes urbanas a nivel agregado.
- Formulación del equilibrio de usuario (EU) como inecuación variacional: caso demanda fija.
- Problema de optimización equivalente para EU.
- Formulación del óptimo del sistema (OS)
- Método de combinaciones convexas: algoritmo de Frank-Wolfe.
- Aplicación sobre red real de Chicago.

Funciones de rendimiento

- Modelan el comportamiento de la infraestructura (fija) para diversos niveles de demanda.
- Estiman el nivel de servicio asociado al uso de infraestructura con capacidad limitada.
- Redes de transporte urbano: representación agregada de la relación nivel de servicio (demora)-infraestructura vial, a nivel de arco.
- Demoras normalmente ocurren físicamente en los nodos, sin embargo para efectos de modelación se transfiere todo el costo a los arcos.
- Funciones BPR son las más usadas para representar estas relaciones

Funciones de rendimiento



Funciones de rendimiento

- Tiene sentido calibrar estas funciones usando mediciones de flujo en periodos más o menos largos (períodos peak por ejemplo).
- Estamos asumiendo $t_a(x_a)$, lo cual podría no ser tan realista en todos los casos, pero es muy razxonable en términos generales.

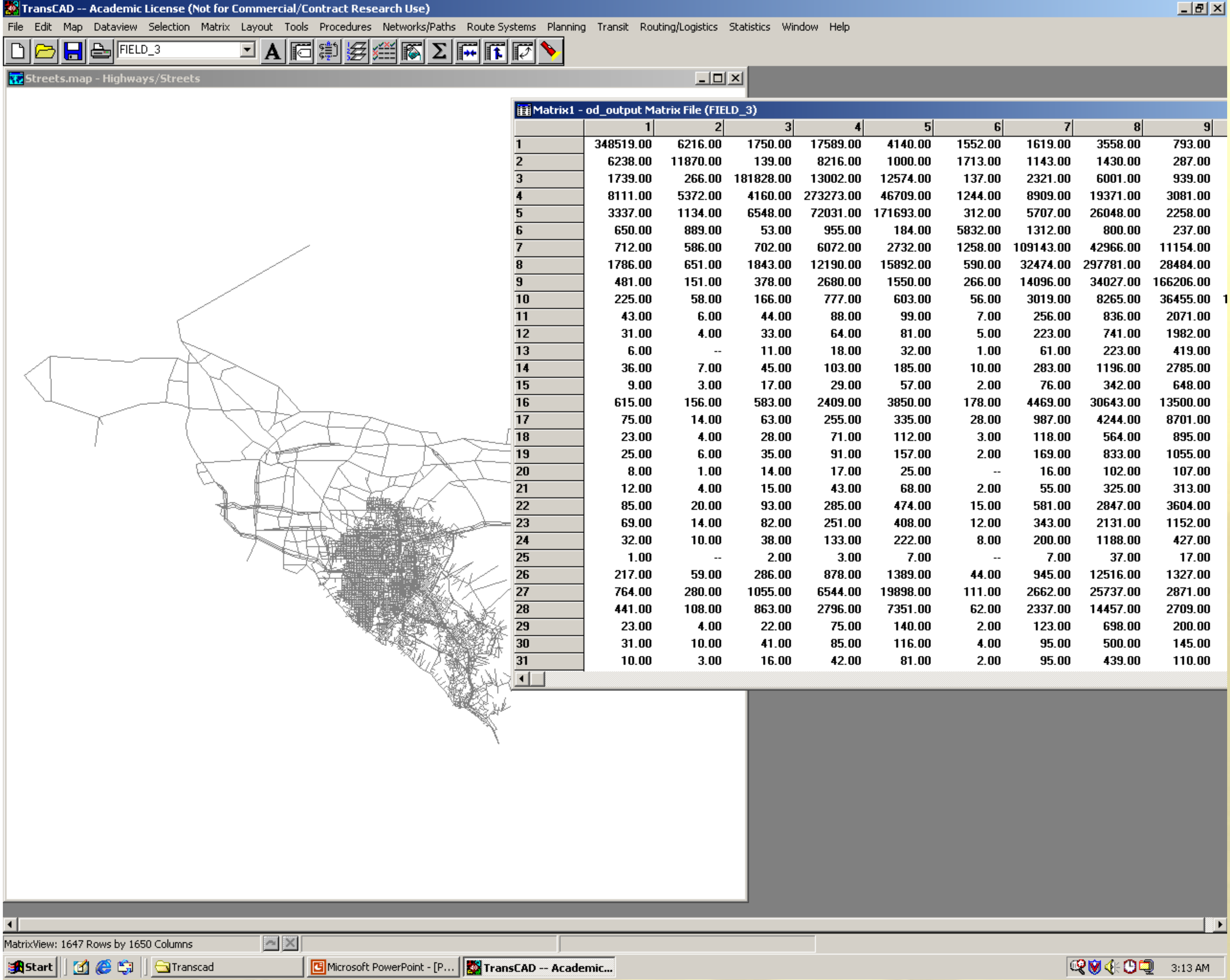
Funciones BPR:

$$t_a(x_a) = t_a^0 \cdot \left(1 + B \cdot \left(\frac{x_a}{C_a} \right)^{Power} \right)$$

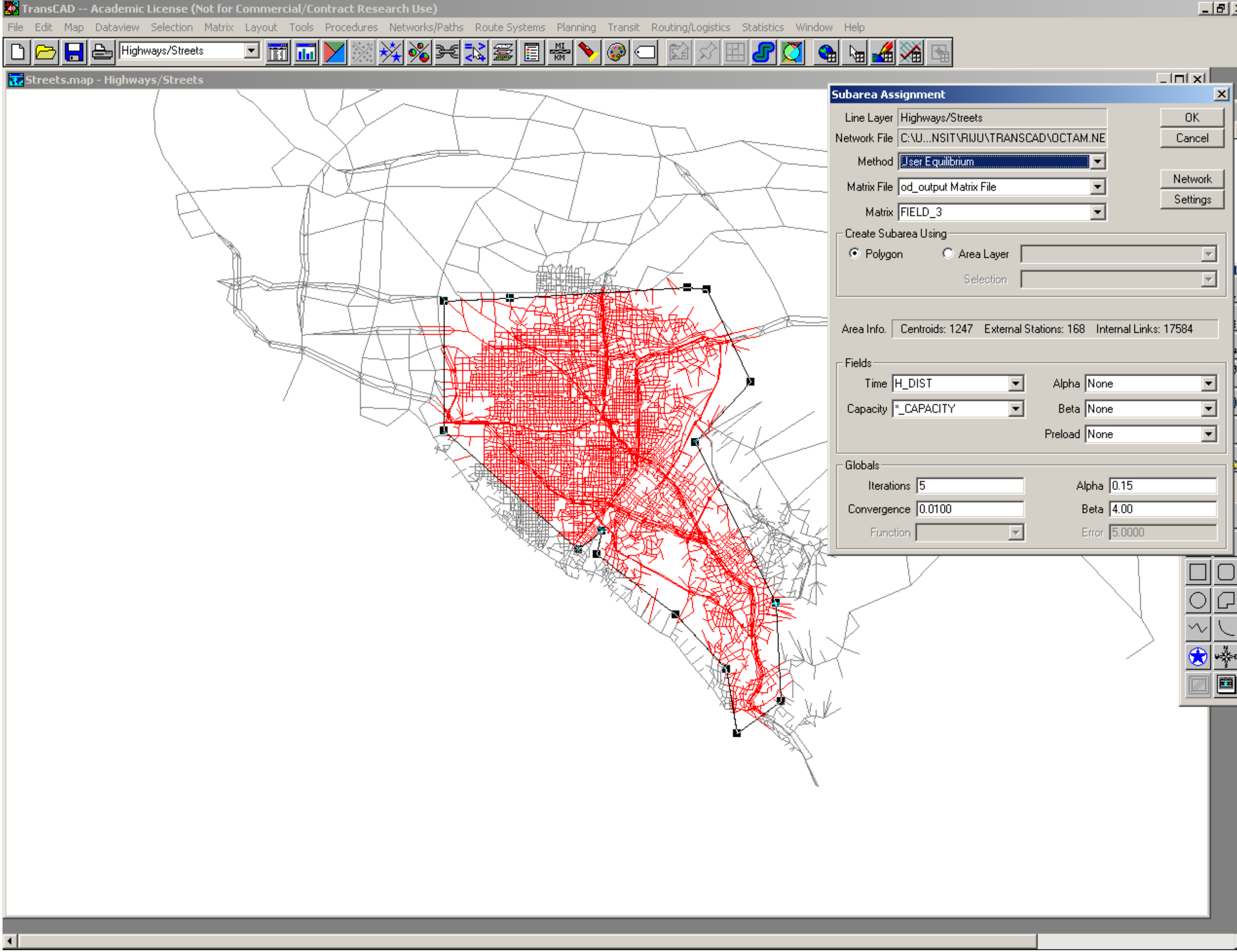
Estas funciones permiten superar la capacidad $\frac{x_a}{C_a} > 1$

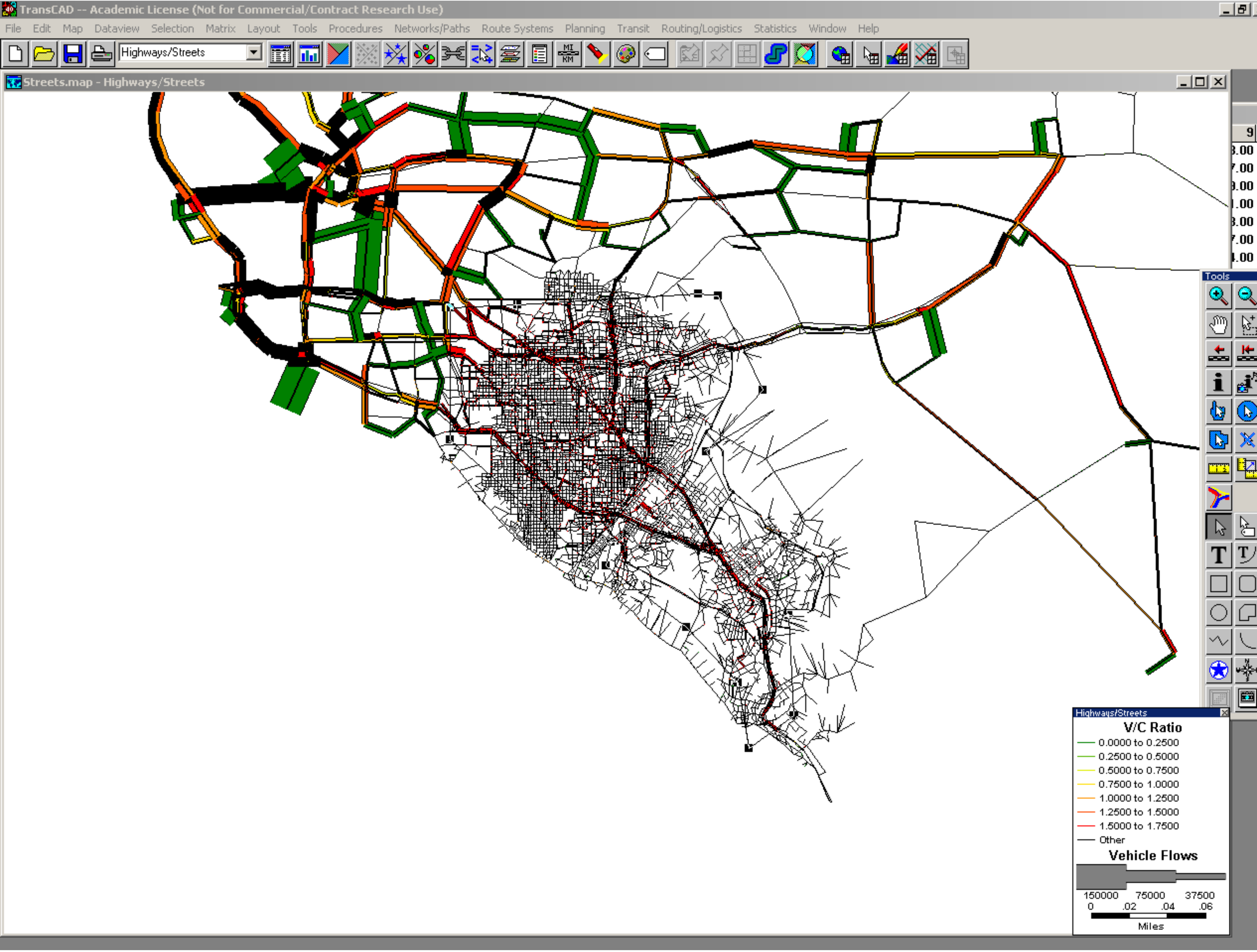
Equilibrio en redes de transporte privado

- Se debe disponer de:
    - ⋆ Una representación gráfica de la red de transporte privado G(N,A).
    - ⋆ Funciones de rendimiento asociadas.
    - ⋆ Matriz origen-destino de viajes.
- Se zonifica el área de modelación y se define un centroide por zona + arcos conectores con alta capacidad.
- Trade off entre cantidad de zonas y calidad de resultados



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	348519.00	6216.00	1750.00	17589.00	4140.00	1552.00	1619.00	3558.00	793.00
2	6238.00	11870.00	139.00	8216.00	1000.00	1713.00	1143.00	1430.00	287.00
3	1739.00	266.00	181828.00	13002.00	12574.00	137.00	2321.00	6001.00	939.00
4	8111.00	5372.00	4160.00	273273.00	46709.00	1244.00	8909.00	19371.00	3081.00
5	3337.00	1134.00	6548.00	72031.00	171693.00	312.00	5707.00	26048.00	2258.00
6	650.00	889.00	53.00	955.00	184.00	5832.00	1312.00	800.00	237.00
7	712.00	586.00	702.00	6072.00	2732.00	1258.00	109143.00	42966.00	11154.00
8	1786.00	651.00	1843.00	12190.00	15892.00	590.00	32474.00	297781.00	28484.00
9	481.00	151.00	378.00	2680.00	1550.00	266.00	14096.00	34027.00	166206.00
10	225.00	58.00	166.00	777.00	603.00	56.00	3019.00	8265.00	36455.00
11	43.00	6.00	44.00	88.00	99.00	7.00	256.00	836.00	2071.00
12	31.00	4.00	33.00	64.00	81.00	5.00	223.00	741.00	1982.00
13	6.00	--	11.00	18.00	32.00	1.00	61.00	223.00	419.00
14	36.00	7.00	45.00	103.00	185.00	10.00	283.00	1196.00	2785.00
15	9.00	3.00	17.00	29.00	57.00	2.00	76.00	342.00	648.00
16	615.00	156.00	583.00	2409.00	3850.00	178.00	4469.00	30643.00	13500.00
17	75.00	14.00	63.00	255.00	335.00	28.00	987.00	4244.00	8701.00
18	23.00	4.00	28.00	71.00	112.00	3.00	118.00	564.00	895.00
19	25.00	6.00	35.00	91.00	157.00	2.00	169.00	833.00	1055.00
20	8.00	1.00	14.00	17.00	25.00	--	16.00	102.00	107.00
21	12.00	4.00	15.00	43.00	68.00	2.00	55.00	325.00	313.00
22	85.00	20.00	93.00	285.00	474.00	15.00	581.00	2847.00	3604.00
23	69.00	14.00	82.00	251.00	408.00	12.00	343.00	2131.00	1152.00
24	32.00	10.00	38.00	133.00	222.00	8.00	200.00	1188.00	427.00
25	1.00	--	2.00	3.00	7.00	--	7.00	37.00	17.00
26	217.00	59.00	286.00	878.00	1389.00	44.00	945.00	12516.00	1327.00
27	764.00	280.00	1055.00	6544.00	19898.00	111.00	2662.00	25737.00	2871.00
28	441.00	108.00	863.00	2796.00	7351.00	62.00	2337.00	14457.00	2709.00
29	23.00	4.00	22.00	75.00	140.00	2.00	123.00	698.00	200.00
30	31.00	10.00	41.00	85.00	116.00	4.00	95.00	500.00	145.00
31	10.00	3.00	16.00	42.00	81.00	2.00	95.00	439.00	110.00


TransCAD -- Academic License (Not for Commercial/Contract Research Use)
File Edit Map Dataview Selection Matrix Layout Tools Procedures Networks/Paths Route Systems Planning Transit Routing/Logistics Statistics Window Help
Highways/Streets
Streets.map - Highways/Streets
Subarea Assignment
Line Layer Highways/Streets
Network File C:\U...NSIT\RIJU\TRANSCAD\OCTAM.NE
Method User Equilibrium
Matrix File od_output Matrix File
Matrix FIELD_3
OK
Cancel
Network
Settings
Create Subarea Using
Polygon
Area Layer
Selection
Area Info.
Centroids: 1247 External Stations: 168 Internal Links: 17584
Fields
Time H_DIST
Alpha None
Capacity *_CAPACITY
Beta None
Preload None
Globals
Iterations 5
Alpha 0.15
Convergence 0.0100
Beta 4.00
Function
Error 5.0000


TransCAD -- Academic License (Not for Commercial/Contract Research Use)
File Edit Map Dataview Selection Matrix Layout Tools Procedures Networks/Paths Route Systems Planning Transit Routing/Logistics Statistics Window Help
Highways/Streets
Streets.map - Highways/Streets
Tools
Highways/Streets
V/C Ratio
0.0000 to 0.2500
0.2500 to 0.5000
0.5000 to 0.7500
0.7500 to 1.0000
1.0000 to 1.2500
1.2500 to 1.5000
1.5000 to 1.7500
Other
Vehicle Flows
150000 75000 37500
0 .02 .04 .06
Miles

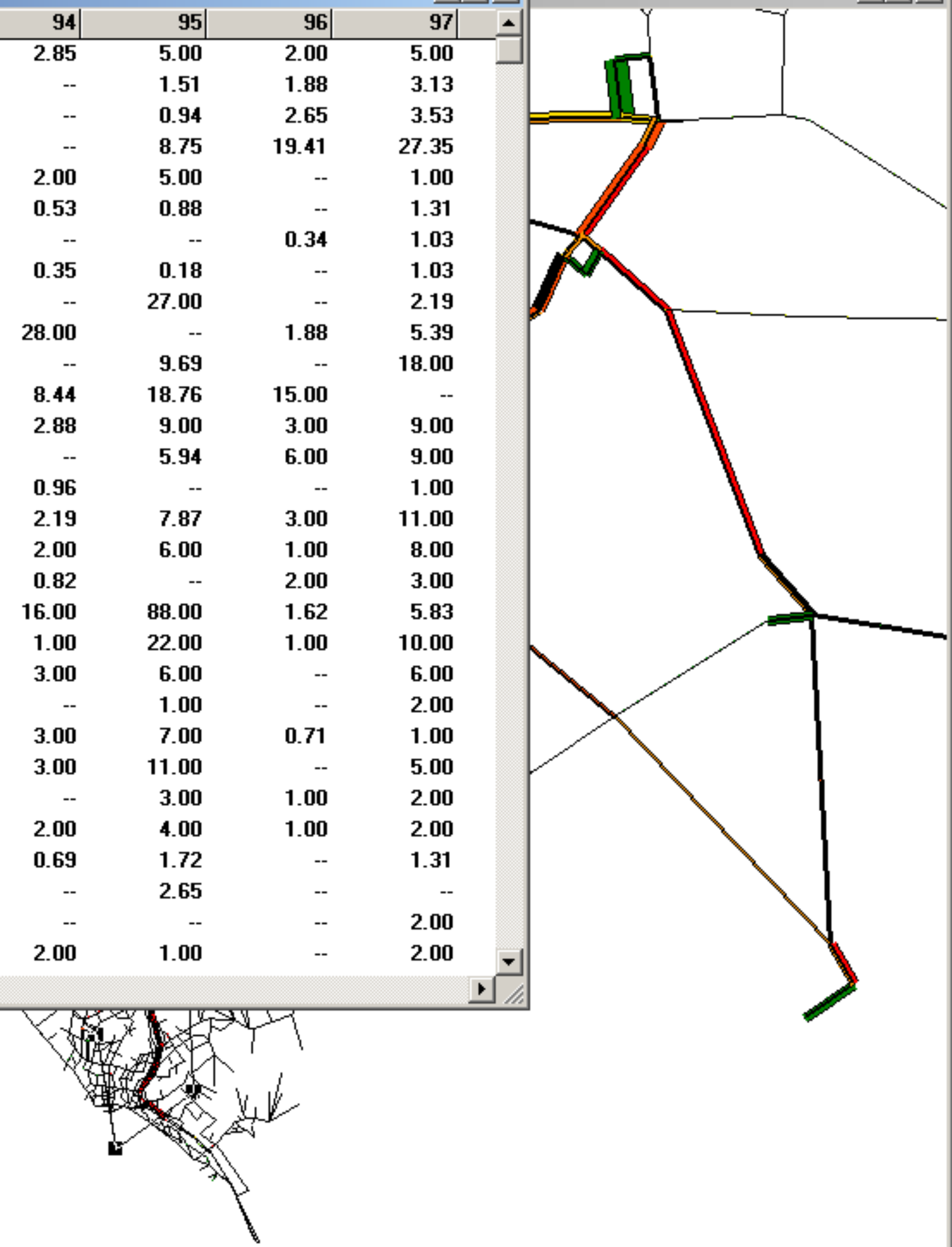
TransCAD -- Academic License (Not for Commercial/Contract Research Use)

File Edit Map Dataview Selection Matrix Layout Tools Procedures Networks/Paths Route Systems Planning Transit Routing/Logistics Statistics Window Help

Demand

Matrix4 - Subarea OD Matrix (Demand)

	18	19	20	21	89	90	92	93	94	95	96	97
18	--	--	157.90	129.45	1.00	3.33	5.72	4.16	2.85	5.00	2.00	5.00
19	--	--	--	--	1.44	2.70	--	2.16	--	1.51	1.88	3.13
20	76.60	--	--	292.00	--	--	0.70	0.53	--	0.94	2.65	3.53
21	130.70	--	758.00	--	1.44	1.40	5.80	1.58	--	8.75	19.41	27.35
89	4.00	1.08	2.83	4.24	--	--	--	--	2.00	5.00	--	1.00
90	3.94	2.81	3.43	3.43	--	--	11.59	8.29	0.53	0.88	--	1.31
92	1.03	--	2.06	4.46	--	4.39	--	28.00	--	--	0.34	1.03
93	1.97	1.56	1.03	2.06	--	4.61	50.00	--	0.35	0.18	--	1.03
94	3.42	1.81	1.68	3.85	2.00	1.04	--	0.52	--	27.00	--	2.19
95	7.00	3.40	5.76	13.93	4.00	0.52	--	1.56	28.00	--	1.88	5.39
96	11.00	6.57	25.00	53.00	1.31	0.40	1.05	0.80	--	9.69	--	18.00
97	16.00	8.44	30.00	57.00	2.65	3.33	5.20	1.56	8.44	18.76	15.00	--
98	25.00	18.33	32.00	61.00	2.00	1.66	2.08	1.66	2.88	9.00	3.00	9.00
99	13.00	5.32	21.00	52.00	--	0.83	2.60	0.52	--	5.94	6.00	9.00
100	1.00	2.63	2.00	5.00	--	--	0.52	0.83	0.96	--	--	1.00
101	9.00	3.75	15.00	28.00	2.00	0.83	1.56	1.04	2.19	7.87	3.00	11.00
102	2.00	2.70	6.00	9.00	1.00	0.83	2.08	--	2.00	6.00	1.00	8.00
103	2.00	3.24	1.00	4.00	1.00	1.66	0.52	--	0.82	--	2.00	3.00
104	11.00	4.98	13.43	27.56	20.00	4.16	--	3.12	16.00	88.00	1.62	5.83
105	6.00	4.31	7.06	16.76	4.00	1.66	5.72	2.08	1.00	22.00	1.00	10.00
106	3.00	4.31	6.00	14.00	2.00	3.33	2.08	0.83	3.00	6.00	--	6.00
107	--	0.54	3.00	3.00	--	--	0.52	--	--	1.00	--	2.00
108	6.00	2.70	4.95	7.77	29.00	1.23	--	1.40	3.00	7.00	0.71	1.00
109	6.00	1.59	5.65	10.60	21.00	--	--	--	3.00	11.00	--	5.00
110	4.00	3.77	4.41	8.82	3.00	6.00	9.62	3.44	--	3.00	1.00	2.00
111	5.00	3.24	4.00	10.00	2.00	4.16	6.76	3.00	2.00	4.00	1.00	2.00
112	7.00	4.31	6.56	6.56	--	28.00	93.00	30.00	0.69	1.72	--	1.31
113	6.00	2.16	4.41	6.18	0.53	7.00	34.00	10.00	--	2.65	--	--
114	5.00	0.54	1.76	2.65	--	1.00	22.00	7.00	--	--	--	2.00
115	5.00	3.77	6.00	11.00	1.37	8.00	16.00	7.00	2.00	1.00	--	2.00



Equilibrio en redes de transporte privado

- Modelo de asignación determinista: definiciones.
- Conjunto K de pares origen-destino.
- Cad $k \in K$ tiene asociado un origen y un destino ($r_k \in N$, $s_k \in N$) y un conjunto de rutas que los conectan (R_k).
- Definimos $R = \bigcup_{k \in K} R_k$
- Matriz de incidencia arco-ruta:

$$\delta_{ar} = \begin{cases} 1, & si\ arco\ a\ forma\ parte\ de\ ruta\ r \in R \\ 0, & si\ no \end{cases}$$

Equilibrio en redes de transporte privado

- Las variables que definen el modelo son:
  - ★ Flujo en rutas $f = (f_l)_{l \in R}$
  - ★ Carga en arcos $x = (x_a)_{a \in A}$
  - ★ Demanda por par O-D $q = (q_k)_{k \in K}$
  - ★ Costos por par O-D $u = (u_k)_{k \in K}$
- Suponemos las siguientes funciones no negativas:
  - ★ Demanda del par $u \to D_k(u)$
  - ★ Costo generalizado del arco $x \to t_a(x)$

Equilibrio en redes de transporte privado

- Definimos el costo de la ruta $l \in R_k$ como:

$$c_l(x) = \sum_{a \in A} t_a(x)\,\delta_{al}$$

y denotamos Ω el conjunto de vectores no negativos

$$(f, x, q, u) \geq 0$$

que satisfacen

- ★ (F0) Ecuación de demanda $\quad q_k = D_k(u)$
- ★ (F1) Conservación de flujo $\quad \sum_{l \in R_k} f_l = q_k$
- ★ (F2) Carga de la red $\quad x_a = \sum_{l \in R} f_l\,\delta_{al}$

Equilibrio en redes de transporte privado

- Definición de equilibrio de usuario (Primer principio de Wardrop): para cada par O-D, en EU, el tiempo de viaje en toda ruta utilizada será el mismo. Además, este tiempo de viaje será menor o igual que aquel que podría experimentar cualquier motorista si decidiera cambiarse unilateralmente a una ruta no ocupada.

Analíticamente, EU consiste en encontrar un vector $(f^*, x^*, q^*, u^*) \in \Omega$ tal que para todo par O-D se satisfaga la siguiente condición:

$$(W) \quad (\forall\, l \in R_k)\; [c_l(x^*) \geq u_k^*] \wedge [f_l^* > 0 \Rightarrow c_l(x^*) = u_k^*\,]$$

14

Existencia de soluciones

- El equilibrio se puede escribir como un problema de complementariedad en las variables de flujo en rutas y nivel de servicio.
- Usando tal formulación, es posible demostrar el siguiente teorema:

T1: Supongamos que los costos $t_a(\cdot)$ son continuos y positivos, $(t_a(x) > 0 \ \forall\, x)$ y que las demandas $D_k(\cdot)$ son continuas, no negativas y acotadas superiormente. Entonces, existe al menos un equilibrio (f^*, x^*, q^*, u^*)

Caracterización de soluciones

- El problema de equilibrio se puede escribir como una inecuación variacional.
- En general, una inecuación variacional es un problema del tipo:

$$(IV)\ encontrar\ \theta^* \in E\ tq\ F(\theta^*) \cdot (\theta - \theta^*) \geq 0\ \ \forall\, \theta \in E$$

definido por un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ y una función $F\colon E \to \mathbb{R}^n$

Escribiremos el equilibrio como una inecuación variacional involucrando sólo a las variables (x,q).

Demanda inelástica

- Consideremos el caso de demanda fija y conocida $q = (q_k)_{k \in K}$
- Equivalente a tomar $D_k(u) = q_k$ de modo que F0 fija la demanda.
- En particular todo equilibrio es de la forma (f^*, x^*, q, u^*) .
- Definamos X_q al conjunto de los x's para los cuales existe un $f \geq 0$ que satisface (F1) y (F2), y consideremos la IV:

$$(EDI)\ encontrar\ x^* \in X_q \quad tq \quad t(x^*) \cdot (x - x^*) \geq 0\ \ \forall\, x \in X_q$$

P1: Si (f^*, x^*, q, u^*) es un equilibrio, entonces x^* resuelve (EDI). Inversamente, si x^* es solución de (EDI), definiendo

$u^*\ \ como\ \ u_k^* = \min\{c_l(x^*) : l \in R_k\}$

y tomando $f^* \geq 0$ que satisfaga (F1) y (F2) el vector (f^*, x^*, q, u^*) es un equilibrio.

Demanda inelástica

En virtud de lo anterior, encontrar el equilibrio en el caso de demanda inelástica es equivalente a resolver (EDI). Las variables f intervienen sólo de manera indirecta en (EDI) a través de las ecuaciones (F1) y (F2) que describen X_q.

18

Inecuaciones variacionales

$$(IV)\ encontrar\ \theta^* \in E\ tq\ F(\theta^*) \cdot (\theta - \theta^*) \geq 0\ \ \forall\, \theta \in E$$

definido por un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ y una función $F: E \to \mathbb{R}^n$

- Preguntas planteadas respecto de soluciones de (IV) son su existencia, unicidad, caracterización y desarrollo de algoritmos para resolverlas.
- Unicidad: monotonía

Definición: $F: E \to \mathbb{R}^n$ se dice monótona si $[F(\theta^1) - F(\theta^2)] \cdot [\theta^1 - \theta^2] \geq 0$ para todo $\theta^1, \theta^2 \in E$. La monotonía es estricta cada vez que $\theta^1 \neq \theta^2$.

P2: Si F es estrictamente monótona, (IV) admite a lo más una solución.

Inecuaciones variacionales

$$(IV)\ encontrar\ \theta^* \in E\ tq\ F(\theta^*) \cdot (\theta - \theta^*) \geq 0 \ \ \forall\ \theta \in E$$

definido por un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ y una función $F: E \to \mathbb{R}^n$

Respecto de la caracterización de soluciones, una clase interesante de IV son aquellas en que E es convexo y la función F() admite un potencial. Esto es, existe una fn. escalar $f(\cdot)$ tal que $F(\theta) = \nabla f(\theta)$

En tal caso, el problema de optimización asociado

$$(P) \quad \min_{\theta \in E} f(\theta)$$

está estrechamenterelacionado con (IV).

P3: Todo mínimo local de (P) es solución de (IV). Recíprocamente, si el potencial f() es convexo, entonces toda solución de (IV) es un mínimo global de (P).

Inecuaciones variacionales

$$(IV)\ encontrar\ \theta^* \in E\ tq\ F(\theta^*) \cdot (\theta - \theta^*) \geq 0\ \ \forall\ \theta \in E$$

definido por un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ y una función $F: E \to \mathbb{R}^n$

Notemos que la convexidad de f() es equivalente a la monotonía de $\nabla f(\theta)$.

No siempre es fácil reconocer cuando una función F() admite un potencial.

Si F es de clase C^1 una condición necesaria es que las derivadas cruzadas sean iguales, esto es,

$$\frac{\partial F_i}{\partial \theta_j} = \frac{\partial F_j}{\partial \theta_i}$$

Esta condición es suficiente si F es un abierto convexo.

Situación simple, $F_i(\theta) = F_i(\theta_i)$

en cuyo caso, $$f(\theta) = \sum_{n=1}^{n} \int_0^{\theta_i} F_i(z)dz$$

Caso demanda inelástica

Consideremos el problema (EDI), con fns. de costo continuas del tipo $x_a \to t_a(x_a)$. Dado que X_q es convexo, toda solución de

$$(PI) \qquad \min_{x \in X_q} \sum_{n=1}^{n} \int_0^{x_a} t_a(z)dz$$

es también solución de (EDI). Si las funciones $t_a(x_a)$ son no-decrecientes, entonces (PI) es un problema convexo, y todos los equilibrios son mínimos. Además, si los $t_a(x_a)$ son estrictamente crecientes, el problema (PI) es estrictamente convexo y el equilibrio es único. Finalmente, para asegurar existencia, basta suponer que $t_a(z) > 0 \;\; \forall\, z > 0$

22